Pratique Supplémentaire 9

Cette série fait suite aux chapitres 5.1, 5.2, 5.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.
b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Exercice 3

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A = PDP^{-1}$; ensuite, utiliser cette expression pour donner une expression simple pour A^k, pour un entier positif k quelconque.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Calculer les vecteurs propres de A.

3. Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
4. Calculer A^{1000}.

Exercice 5

Conseil : pour calculer $\frac{1}{z}$ où z est complexe, démarrez avec $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}}$.

a) Calculer $\bar{i}$, $\overline{i^2}$, $(\bar{i})^2$, $\frac{1}{i}$ (aussi noté i^{-1}).

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Décrire géométriquement le produit iz.

c) Soit $w = 1 + i$ et $z = 2 + 3i$. Calculer w/z (à mettre sous la forme $a + bi$).

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.	☐	☐
b) Pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes.	☐	☐
c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes.	☐	☐
d) Soient A, B et C trois matrices de même taille. Si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C.	☐	☐
